

CALCUL ALGEBRIC

1. Forma simplă a expresiei $E(x) = (2x + 3)^2 - (2x - 3)^2$ este:
 - a. 0
 - b. 18
 - c. $24x$
 - d. $24x+18$
2. Se consideră expresia $E(x) = \left(\frac{x+4}{x-3} - \frac{x-3}{x+4} + \frac{49}{x^2+x-12}\right) : \frac{7}{x-3}$, unde x este număr real, $x \neq -4$ și $x \neq 3$.
 - a. Arată că $x^2 + x - 12 = (x - 3)(x + 4)$, pentru orice număr real x .
 - b. Arată că numărul $N = \sqrt{E(2) + E(4) + E(6) + \dots + E(16)}$ este natural.
3. Se consideră expresia $E(x) = (x + 3)(x - 4) - (-2 + x)(-4 - x) - 2(x^2 - 10)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - a. Arătați că $E(x) = x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
 - b. Calculați $E(1) + E(2) + E(3) + \dots + E(2025)$.
4. Se consideră expresia $E(x) = (5x + 2)^2 - (4x - 3)^2 - (3x + 4)(3x - 4) - 3(16x - 3)$
 - a. Arată că $E(x) = -4x + 20$
 - b. Determină valorile numărului întreg a pentru care $\sqrt{[E(a)]^2} \leq 12$.
5. Fie $E(x) = (2x + 1)^2 - (2x - 1)^2 - 4(2x + 3x) + 2$, unde $x \in \mathbb{R}$.
 - a. Arătați că $E(x) = 2 - 12x$, pentru orice număr real x .
 - b. Determinați numerele naturale a pentru care $-10a + 2 - E(a) \leq 2\sqrt{3}$
6. Se consideră expresia $E(x) = (3x + 2)^2 - (x + 2)(x - 2) - 7(x - 3)(x + 2) - 18x$, unde x este un număr real.

- a. Arătați că $(3x + 2)^2 - (x + 2)(x - 2) = 8x^2 + 12x + 8$, pentru orice număr real x .
- b. Arătați că $E(n) : 2$, pentru orice număr întreg n .
7. Se consideră expresia $E(x) = (2x + 3)^2 - (2x - 3)(x + 2) - 2(x - 2)^2$, unde x este un număr real.
- a. Arată că $E(x) = 19x + 7$, pentru orice număr real x .
- b. Se consideră mulțimea $A = \{n \in \mathbb{N} \mid E(n) = E(-n)\}$. Determinați cardinalul mulțimii A .
8. Se consideră expresia $E(x) = (x + 2)^2 - 2(x + 2) + (1 - x)(1 + x)$ unde x este număr real.
- a. Calculează $E(-1)$
- b. Determină $n \in \mathbb{N}$, pentru care $\frac{3}{E(n)} \in \mathbb{Z}$.
9. Se consideră expresia $E(x) = \left(\frac{x+3}{x-1} + \frac{4x}{x^2+2x-3}\right) : \frac{x+9}{x-1}$, unde x este număr real, $x \neq -9$, $x \neq -3$ și $x \neq 1$.
- a. Arată că $x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3)$, pentru orice număr real x .
- b. Arată că numărul $T = \sqrt{90 \cdot E(3) \cdot E(4) \cdot E(5) \cdot E(6)}$ este natural.
10. Se consideră expresia $E(x) = \left(\frac{x+3}{x-1} + \frac{4x}{x^2+2x-3}\right) : \frac{x+9}{x-1}$ unde x este număr real, $x \neq -9$, $x \neq -3$ și $x \neq 1$.
- a. Arată că $x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3)$, pentru orice număr real x .
- b. Arată că numărul $T = \sqrt{90 \cdot E(3) \cdot E(4) \cdot E(5) \cdot E(6)}$ este natural.

11. Se consideră expresia $E(x) = \left(\frac{1}{x^2-4} + \frac{1}{x+2}\right) : \frac{1}{x^3-4x}$, unde x este număr real, $x \neq 0$, $x \neq -2$ și $x \neq 2$.

a. Arată că $\frac{1}{x^2-4} + \frac{1}{x+2} = \frac{x-1}{(x+2)(x-2)}$, pentru orice număr real x , $x \neq -2$ și $x \neq 2$.

b. Arată că numărul $N = E(\sqrt{2}-1) + 3 \cdot E(\sqrt{2}+1)$ este natural.

12. Se consideră expresia $E(x) = \left(\frac{2}{x-3} - \frac{3}{x} + \frac{2}{x+3}\right) : \frac{1}{x^2-3x}$, unde x este număr real, $x \neq -3$, $x \neq 0$ și $x \neq 3$.

a. Arată că $\frac{2}{x-3} - \frac{3}{x} + \frac{2}{x+3} = \frac{x^2+27}{x(x-3)(x+3)}$ pentru orice număr real x , $x \neq -3$, $x \neq 0$ și $x \neq 3$.

b. Demonstrează că $E(n) > 6$, pentru orice număr natural n , $n \neq 0$, $n \neq 3$.

13. Se consideră expresia $E(x) = \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{x-2}{x+2} + \frac{x+2}{2-x} + \frac{4x}{x^2-4}\right) \cdot \left(\frac{1}{4-x^2}\right)^{-1}$, unde $x \in \mathbf{R} \setminus \{-2; 0; 2\}$

a. Arată că $\frac{x-2}{x+2} + \frac{x+2}{2-x} + \frac{4x}{x^2-4} = -\frac{4x}{x^2-4}$, oricare ar fi $x \in \mathbf{R} \setminus \{-2; 2\}$

b. Arată că $[1 + E(x)]^{2025}$ este un număr natural divizibil cu 5.

14. Se consideră expresia $E(x) = \left(\frac{x}{x+2} - \frac{1}{x^2-4} + \frac{2}{x-2}\right) \cdot \left(1 - \frac{2x+3}{x^2+3}\right) + \frac{4}{x+2}$, unde $x \in \mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$.

a. Arătați ca $E(x) = \frac{x+4}{x+2}$, pentru orice $x \in \mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$.

b. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $(x+2)^2 \cdot \frac{x+4}{x+2} = 3$.

15. Se consideră expresia $E(x) = \left(\frac{3x-9}{x^2-2x-3} - \frac{4x+3}{x^2-1} - \frac{3}{1-x}\right) : \frac{1}{x^2-1}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1; 1; 3\}$

a. Arată că $\frac{3x-9}{x^2-2x-3} = \frac{3}{x+1}$, oricare ar fi $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1; 3\}$.

b. Rezolvă în mulțimea $\mathbf{R} \setminus \{-1; 1; 3\}$ inecuația $|E(x)| \leq 3$.